4つの放物元に関するトレース恒等式について : その2(双曲空間のトポロジー、複素解析および数論)

AUTHOR(S):

中西, 敏浩

数理解析研究所講究録
第 1571 巻 2007 年 193-198

4 つの放物元に関するトレース恒等式について (その 2)

島根大学総合理工学部 中西敏浩 (Toshihiro Nakanishi)
Shimane University

1. トレース恒等式 $A,B,C\in SL(2,\mathbb{C})$ に対して次式が成り立つ。
(1) $\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}A^{-1}$
(2) $\mathrm{tr}A\mathrm{tr}B=\mathrm{tr}AB+\mathrm{tr}AB^{-1}$
この 2 つからさまざまなトレース恒等式が得られる ([1] の §3.4 を参照). 次の補題はその一例である。

Lemma 1. $A,B,P\in SL(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}P=-2$ であるとする。$a=\mathrm{tr}A$, $b=\mathrm{tr}B$, $c=\mathrm{tr}AB$, $x=-a-\mathrm{tr}AP$, $y=-c-\mathrm{tr}ABP$, $z=-b-\mathrm{tr}BP$ とおくと

$$x^2+y^2+z^2-ayz-bxy+czx=0 \tag{1}$$

2 つの放物元 $P_1,P_2\in SL(2,\mathbb{C})$ が固定点を共有しないとき

$$P_1P_2=-Q^2 \tag{2}$$

をみたす $Q\in SL(2,\mathbb{C})$ が符号を除いて一意的に存在する (Q が (2) をみたせば、$-Q$ もそうである)。この Q は同時に

$$P_2=Q^{-1}P_1Q \tag{3}$$

をみたす。放物元の列 $P_1,P_2,\ldots,P_n,P_{n+1}=P_1$ の隣り合うどの 2 つも固定点を共有しないとき $Q_1,\ldots,Q_n$ を $P_iP_{i+1}=-Q_i^2$ $(i=1,2,\ldots,n)$ をみたすように選ぶ。ただしこれらは符号を除いて定まるから 2^n 通りの選び方があることに注意。このとき

$$\mathrm{tr}Q_1Q_2\cdots Q_n=-2 \text{ または } \mathrm{tr}Q_1Q_2\cdots Q_n=+2$$

である。$(Q_1,Q_2,\ldots,Q_n)$ は前者であれば $(-)$ 系、後者であれば $(+)$ 系と呼ぶ。

Theorem 1. ([3]) P_1,P_2,P_3,P_4 は放物元であり、相異なる固定点を持つものとする。Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 を

$$P_1P_2=-Q_1^2,\quad P_2P_3=-Q_2^2,\quad P_3P_4=-Q_3^2,$$
$$P_4P_1=-Q_4^2,\quad P_3P_1=-Q_5^2,\quad P_2P_4=-Q_6^2$$

となるように選ぶ。$Q_5'=P_1Q_5P_1^{-1}$, $Q_6'=P_4Q_6P_4^{-1}$ とおく。もし

(Q_1, Q_2, Q_5), (Q_5', Q_3, Q_4), (Q_1, Q_6, Q_4), (Q_6', Q_2, Q_3) がすべて $(-)$ 系

あるいは、これと同値な条件

(Q_1, Q_2, Q_5), (Q_1, Q_6, Q_4) および (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) がすべて $(-)$ 系

がみたされれば

$$\mathrm{tr}Q_1\mathrm{tr}Q_3 + \mathrm{tr}Q_2\mathrm{tr}Q_4 = \mathrm{tr}Q_5\mathrm{tr}Q_6 \tag{4}$$

Lemma 2. $A, B, P \in SL(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{tr}P = -2$ であるとする。

$$PA^{-1}PA = -Q_1^2,\ A^{-1}PABPB^{-1} = -Q_2^2,\ BPB^{-1}P = -Q_3^2$$

をみたす Q_1, Q_2, Q_3 を

$$\mathrm{tr}Q_1 = -\mathrm{tr}A - \mathrm{tr}AP,\ \mathrm{tr}Q_2 = -\mathrm{tr}AB - \mathrm{tr}ABP,\ \mathrm{tr}Q_3 = -\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}BP$$

となるように選ぶと (Q_1, Q_2, Q_3) は $(-)$ 系

証明. $x = \mathrm{tr}Q_1$, $y = \mathrm{tr}Q_1$, $z = \mathrm{tr}Q_1$, $a = \mathrm{tr}A$,$b = \mathrm{tr}B$,$c = \mathrm{tr}AB$ とおく。

$$\begin{aligned} & xyz\mathrm{tr}Q_1Q_2Q_3 \\ &= \mathrm{tr}Q_1^2Q_2^2Q_3^2 + \mathrm{tr}Q_1^2Q_2^2 + \mathrm{tr}Q_2^2Q_3^2 + \mathrm{tr}Q_3^2Q_1^2 + \mathrm{tr}Q_1^2 + \mathrm{tr}Q_2^2 + \mathrm{tr}Q_3^2 + 2 \end{aligned}$$

だから、右辺が $-2xyz$ に等しいことを示せばよい。$P_1 = P$, $P_2 = A^{-1}PA$, $P_3 = BPB^{-1}$ とおく。

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}Q_1^2Q_2^2Q_3^2 + \mathrm{tr}Q_1^2Q_2^2 + \mathrm{tr}Q_2^2Q_3^2 + \mathrm{tr}Q_3^2Q_1^2 + \mathrm{tr}Q_1^2 + \mathrm{tr}Q_2^2 + \mathrm{tr}Q_3^2 + 2 \\ = & -\mathrm{tr}P_1^2P_2^2P_3^2 + \mathrm{tr}P_1P_2^2P_3 + \mathrm{tr}P_2P_3^2P_1 + \mathrm{tr}P_3P_1^2P_2 - \mathrm{tr}P_1P_2 - \mathrm{tr}P_2P_3 \\ & -\mathrm{tr}P_3P_1 + 2 \\ = & 2\mathrm{tr}P_1P_2P_3 + 2\mathrm{tr}P_1P_2 + 2\mathrm{tr}P_2P_3 + 2\mathrm{tr}P_3P_1 - 4 \\ = & 2(\mathrm{tr}PA^{-1}PABPB^{-1} - x^2 - y^2 - z^2 + 2) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} & \mathrm{tr}PA^{-1}PABPB^{-1} \\ = & \quad \mathrm{tr}PA^{-1}PAB\mathrm{tr}PB^{-1} - \mathrm{tr}A^{-1}PAB^2 \\ = & (\mathrm{tr}PA^{-1}\mathrm{tr}PAB - \mathrm{tr}A^2B)\mathrm{tr}PB^{-1} - b\mathrm{tr}A^{-1}PAB - 2 \\ = & (\mathrm{tr}PA^{-1}\mathrm{tr}PAB - ac + b)\mathrm{tr}PB^{-1} \\ & -b[a(\mathrm{tr}ABP) - 2b + c(\mathrm{tr}A^{-1}P) + 2ab - \mathrm{tr}PB] - 2 \\ = & [(x-a)(-c-y) - ac + b](z-b) \\ & -b[a(-c-y) - 2b + (x-a)c + 2ab + z + b] - 2 \\ = & -xyz - cxy + ayz + bxy - 2 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&2(\mathrm{tr}PA^{-1}PABPB^{-1}-x^2-y^2-z^2+2)\\
&= 2(-xyz-x^2-y^2-z^2+ayz+bxy-cxy)\\
&= -2xyz
\end{aligned}$$

よって (Q_1, Q_2, Q_3) は $(-)$ 系である。 □

2. 捩れのある三角形と捩れのない三角形

F を向き付け可能な種数 g の閉曲面とし、p を F の1点とする。$F' = F - \{p\}$ とおくと F' の基本群 G は表示

$$G = \langle a_1, b_1, ..., a_g, b_g, c : (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})\cdots(a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1})c = 1\rangle \tag{5}$$

をもつ。ρ は G の忠実な $SL(2,\mathbb{C})$ 表現で $\rho(c)$ は放物型かつ $\mathrm{tr}\rho(c) = -2$ をみたすものとする。T を F に埋め込まれた ideal triangle とすると、ρ は T の3つのエンド (頂点の近傍) に3つの放物元 P_1, P_2, P_3 を対応させる。$Q_1^2 = -P_1P_2$, $Q_2^2 = -P_2P_3$, $Q_3^2 = -P_3P_1$ をみたす Q_1, Q_2, Q_3 が符号の差を除き一意に定まる。ここではどのように (Q_1, Q_2, Q_3) を選べば $(-)$ 系 (あるいは $(+)$ 系) になるかについて論じる。

2.1. 平面三角形の3頂点を同一視した図形 T を含む曲面 S を考える。T の S における正則近傍は three-holed sphere であるか、あるいは one-holed torus である。前者の場合には (T, S) を T の untwisted triangle としての実現、後者の場合には (T, S) を T の twisted triangle としての実現という。S が予めわかっている場合は T を前者の場合は untwisted triangle, 後者の場合は twisted triangle と呼ぶことにする。

untwisted triangle　　twisted triangle

同一視された T の頂点を p とする。S' を S から p を除いた曲面とする。T の3辺は S' の3つの ideal arc c_1, c_2, c_3 を定める。c をこれらのうちの一つとし、c をまた単位開区間からの連続写像

$$c : I^\circ = (0,1) \to S'$$

と同一視する。c は $c(0)=c(1)=p$ とおいて曲線 $c: I=[0,1]\to F$ に拡張できる。

区間 $I=[0,1]$ を閉円板 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1/2)^2+y^2\le 1\}$ 内の区間 $\{(x,0):0\le x\le 1\}$ と同一視する。はめ込み写像

$$\varphi : D\to S$$

を φ の I への制限が c と一致するように選ぶ。このとき $\hat{c}=\varphi(\partial D)$ は S' 上の閉曲線である。$c=c_i$ $(i=1,2,3)$ のときの $\hat{c}$ を $\hat{c_i}$ とおく。

S' の基本群 $\pi_1(S')$ の忠実な $SL(2,\mathbb{C})$ 表現 ρ で S' の puncture の回りのループのホモトピー類を -2 をトレースにもつ放物元に写すものを一つ選ぶ。$\hat{c_i}$ のホモトピー類もまた $\hat{c_i}$ と記す。(こうした abuse of notation は以下でもよく用いる。) このとき $A,B\in SL(2,\mathbb{C})$ が存在して次をみたす。

$$\rho(\hat{c_1})=PA^{-1}PA,\ \rho(\hat{c_2})=A^{-1}PABPB^{-1},\ \rho(\hat{c_3})=BPB^{-1}P \tag{6}$$

$Q_1,Q_2,Q_3\in SL(2,\mathbb{C})$ を次のように選ぶ。

$$Q_1^2=-PA^{-1}PA,\ Q_2^2=-A^{-1}PABPB^{-1},\ Q_3^2=-BPB^{-1}P. \tag{7}$$

ただし Q_1, Q_2, Q_3 は一意的には定まらない。

S 上の単純閉曲線 $c_i\cup\{p\}$ $(i=1,2,3)$ の正則近傍 N を選ぶ。その境界は S' 内の 2 つの単純閉曲線 c_i', c_i'' からなる。$\rho(c_i')=C_i'$, $\rho(c_i'')=C_i''$ とおくと

$$\mathrm{tr}^2 Q_i=(\mathrm{tr}C_i'+\mathrm{tr}C_i'')^2$$

が成立する。$\mathrm{tr}C_i'+\mathrm{tr}C_i''$ は表現 ρ にのみによって決まる量であることに注意する。もし

$$\mathrm{tr}Q_i=-\mathrm{tr}C_i'-\mathrm{tr}C_i''$$

をみたすように選ぶならば次が成り立つ。

Proposition. Q_1,Q_2,Q_3 を上のように選ぶ。もし T が untwisted であれば (Q_1,Q_2,Q_3) は $(-)$ 系である。T が twisted であれば (Q_1,Q_2,Q_3) は $(+)$ 系である。

証明は Lemma 2 の応用である。T が untwisted である場合と twisted である場合との結果の違いは次のような理由から生じる。(6) における A,B は $\rho(\pi_1(S'))$ の標準生成系

$$\rho(\pi_1(S'))=\begin{cases}(A,B,C,P: ABCP=1) & (T\text{ が untwisted})\\ (A,B,P: ABA^{-1}B^{-1}P=1) & (T\text{ が twisted})\end{cases}$$

の一部になる。T が untwisted ならば、例えば

$$\mathrm{tr}C_1' + \mathrm{tr}C_1'' = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}AP,\ \mathrm{tr}C_2' + \mathrm{tr}C_2'' = \mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}ABP \tag{8}$$

であれば,

$$\mathrm{tr}C_3' + \mathrm{tr}C_3'' = \mathrm{tr}B + \mathrm{tr}BP$$

となるが、T が twisted ならば (8) のようになったときは

$$\mathrm{tr}C_3' + \mathrm{tr}C_3'' = \mathrm{tr}B^{-1} + \mathrm{tr}B^{-1}P = -\mathrm{tr}B - \mathrm{tr}BP$$

となる。

2.2. 表示 (5) をもつ 1 点穴あき曲面 F' の基本群 G の忠実な $SL(2,\mathbb{C})$ 表現 ρ で $\mathrm{tr}\rho(c) = -2$ となるものの同値類全体の空間を R とする。F' は $d+1$ $(d = 6g-4)$ 個の ideal arcs による三角形分割 (ideal triangulation) $\Delta = (c_1, \ldots, c_{d+1})$ をもつ。F 上の単純閉曲線 $c_i \cup \{p\}$ $(i = 1, 2, \ldots, d+1)$ の正則近傍の境界曲線を c_i', c_i'' とする。$[\rho] \in R$ に対して

$$\lambda_{c_i}(\rho) = -\mathrm{tr}\rho(c_i') - \mathrm{tr}\rho(c_i'')$$

とおく。

Theorem 2 写像

$$\Phi_\Delta : R \to \mathbb{C}^{d+1}\ :\ \Phi_\Delta([\rho]) = (\lambda_{c_1}(\rho), \lambda_{c_2}(\rho), \cdots, \lambda_{c_{d+1}}(\rho))$$

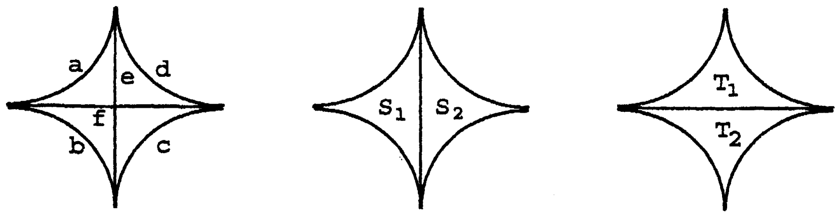
は単射であり、したがって R の大域座標系を与える。

像 $\Phi_\Delta(R)$ は $\mathbb{C}^{d+1}$ で定義されたある多項式の零点集合に含まれることがわかっている。

Δ が定める (ideal) triangle(すなわち $c_1, \ldots, c_{d+1}$ の補空間の成分) は untwisted なものと twisted なものに分類される。今 2 つの triangle S_1, S_2 が一辺 $e \in \Delta$ を共有しているとする。S_1 の残りの辺を a, b, S_2 の残りの辺を c, d とする。ただし四辺形 $Q = S_1 \cup e \cup S_2$ において a と c が対辺になっているものとする。Q のもう一つの対辺を f とするとき Δ から e を除き f を加えることによって新しい三角形分割 Δ' を得る。Q を f で分割してできる triangle を T_1, T_2 とおく (下図参照)。Δ' は Δ から (e における)elementary move によって得られるという。$\Phi_\Delta(R)$ から $\Phi_{\Delta'}(R)$ への座標変換は S_1,S_2,T_1,T_2 が twisted であるか untwisted であるかによって次のようになる。

$$\lambda_e\lambda_f = \epsilon_1\lambda_a\lambda_c + \epsilon_2\lambda_b\lambda_d \tag{9}$$

ここで ϵ_1,ϵ_2 は表の通りである ([2] の §5)。



S_1	S_2	T_1	T_2	(ϵ_1, ϵ_2)
untwisted	untwisted	untwisted	untwisted	$(1, 1)$
twisted	twisted	twisted	twisted	$(1, 1)$
untwisted	twisted	twisted	untwisted	$(1, -1)$
twisted	untwisted	untwisted	twisted	$(1, -1)$
untwisted	twisted	untwisted	twisted	$(-1, 1)$
twisted	untwisted	twisted	untwisted	$(-1, 1)$

2.3. 上の 2.2 節で述べた結果はすでに [2] に与えられているが、(−) 系・(+) 系という用語を導入することによって証明をある意味で「代数化」することができた。ここでは once punctured surface の場合を考えたが、一般の punctured surface でも同様に議論ができる。我々の目標は Penner の論文 [4] の結果をできるだけそのままの形で穴あき曲面群の $SL(2, \mathbb{C})$ 表現の空間に拡張することであった。我々が定義した λ-length が多価 (2 価) 関数なので、いろいろと困難を引き起こしていたが、特別な三角形分割から始めて elementary move を行うごとに λ-lengths を与える $SL(2, \mathbb{C})$ の行列 ((7) に対応するもの) が (−) 系であるか (+) 系であるかに注意しながら座標変換することによって、一般の三角形分割に対する $SL(2, \mathbb{C})$ 表現空間の座標系を得ることができる。

参考文献

[1] Maclachlan, C. and A. W. Reid, *The Arithmetic of Hyperbolic 3-manifolds*, Springer, GTM 219, Springer Verlag, 2003.

[2] Nakanishi, T. and M. Näätänen, complexification of lambda length as parameter for $SL(2, \mathbb{C})$ representation space of punctured surface groups, J. London. Math. Soc., **70** (2004), 383-404

[3] Nakanishi, T., A trace identity for parabolic elements of $SL(2, \mathbb{C})$, Kodai Math. J., **30** (2007), 1–18.

[4] Penner, R. C. The decorated Teichm?ller space of punctured surfaces. Comm. Math. Phys. **113** (1987), 299–339.